Démonstration par récurrence

1) Au rang 1

$n = 1 \Rightarrow 7^{2n} + 16n - 1 = 7^2 + 16 \times 1 - 1 = 49 + 16 - 1 = 64$

64 est divisible par 64, donc <u>OK</u>

2) Supposons que la propriété est vraie au rang n (1)

Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

$$(1) \Leftrightarrow 7^{2n} + 16n - 1 \equiv 0 \, [64]$$

$$\text{Donc } 7^{2n} \equiv 1 - 16n \, [64] \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} 7^{2(n+1)} + 16(n+1) - 1 &= 7^{2n+2} + 16n + 16 - 1 \\ &= 7^{2n} \times 7^2 + 16n + 15 \\ &= 49 \times 7^{2n} + 16n + 15 \end{aligned}$$

D'après (2), $7^{2n} \equiv 1 - 16n \, [64]$

$$\begin{aligned} \text{Donc } 49 \times 7^{2n} + 16n + 15 &\equiv 49 [1 - 16n] + 16m + 15 \, [64] \\ &\equiv 49 - 784m + 16m + 15 \, [64] \\ &\equiv 64 - 768m \, [64] \\ &\equiv 64 (1 - 12m) \, [64] \\ &\equiv 0 \, [64] \end{aligned}$$

<u>CQFD</u>

Donc $7^{2(n+1)} + 16(n+1) - 1 \equiv 0 \, [64]$.