Exercice 29

a) x doit être supérieure à 0,8 m et ne doit pas excéder 12 m

Donc $x \in [0,8 ; 12]$

b) $\mathcal{A}_G(x)$ = Aire ~~Carré~~ Rectangle − Aire Trottoir.

$= 12 \times 30 - x(12-x) - 30x$

$= 360 - 12x + x^2 - 30x$

$= x^2 - 42x + 360$

Il faut que $\mathcal{A}_G(x) \geqslant 280$

Donc $x^2 - 42x + 360 \geqslant 280$

$\Leftrightarrow x^2 - 42x + 360 - 280 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \boxed{x^2 - 42x + 80 \geqslant 0}$

c) on cherche d'abord les racines du polynôme $x^2 - 42x + 80$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-42)^2 - 4 \times 80 \times 1 = 1764 - 320 = 1444$
$= 38^2$

Donc $x_1 = \frac{42+38}{2} = 40$ et $x_2 = \frac{+42-38}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Pour que $x^2 - 42x + 80 \geqslant 0$, il faut que x soit à l'extérieur des racines $x \in]-\infty ; 2] \cup [40 ; +\infty[$

On sait aussi que $x \in [0,8 ; 12]$, donc

$\boxed{S = [0,8 ; 2]}$

$(P_1) : y = 3x^2 + x - 35$ $\qquad\qquad$ $(P_2) : y = 2x^2 - x$

$I(x_I ; y_I) \in (P_1) \cap (P_2)$

$\Leftrightarrow$ $I \in (P_1)$ et $I \in (P_2)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y_I = 3x_I^2 + x_I - 35 \\ y_I = 2x_I^2 - x_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_I = 3x_I^2 + x_I - 35 \\ 3x_I^2 + x_I - 35 = 2x_I^2 - x_I \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_I = 3x_I^2 + x_I - 35 \\ x_I^2 + 2x_I - 35 = 0 \quad (1) \end{cases}$

Cherchons les racines de $x_I^2 + 2x_I - 35$.

$$\Delta = 4 + 4 \times 35 = 144 = 12^2$$

Donc $x_I = \dfrac{-2+12}{2} = 5$ ou $x_I = \dfrac{-2-12}{2} = -7$.

si $x_I = 5$; $y_I = 3 \times 5^2 + 5 - 35 = 45$

si $x_I = -7$; $y_I = 3 \times (-7)^2 - 7 - 35 = 105$

Donc les points d'intersection de (P_1) et (P_2)

sont $I_1(5 ; 45)$ et $I_2(-7 ; 105)$