I) Le TRESOR a pour coordonnées $(x ; y)$ et s'appelle Z

Z est aligné avec T et F

Z se trouve sur la parabole (P) qui passe par A et qui pour sommet S

Z est donc le point d'intersection de la parabole (P) et de la droite (TF).

Déterminons (P) et (TP).

$(P) : \quad y = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = x_S = 3$ et $\beta = y_S = 4$

Donc $(P) : \quad y = a(x-3)^2 + 4$.

$A \in (P) \Rightarrow y_A = a(x_A - 3)^2 + 4 \Leftrightarrow 13 = a(0-3)^2 + 4$

$\Leftrightarrow 13 = 9a + 4 \Leftrightarrow 9a = 9 \Leftrightarrow a = 1.$

Donc $(P) : \quad y = (x-3)^2 + 4.$

(TF) : $\vec{TZ}$ et $\vec{TF}$ sont colinéaires

$\vec{TZ}\,(x-12 ; y-15) \qquad \vec{TF}\,(-11 ; -11)$

Donc $-11(y-15) + 11(x-12) = 0 \Leftrightarrow -y + 15 + x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow x - y + 3 = 0$

Donc $\boxed{(TF) : \; y = x + 3 \quad \text{ou} \quad x - y + 3 = 0.}$

Trouvons maintenant le point d'intersection de (TP) et (P)

$\begin{cases} y = (x-3)^2 + 4 \\ y = x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3 \\ x + 3 = (x-3)^2 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3 \\ x + 3 = x^2 - 6x + 9 + 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3 \\ \text{on calcule le discriminant } \Delta = 49 - 40 = 9 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x = \dfrac{7+3}{2} = 5 \\ y = 5 + 3 = 8 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = \dfrac{7-3}{2} = 2 \\ y = 2 + 3 = 5. \end{cases}$

Donc $Z_1(5;8)$ ou $Z_2(2;5)$ ②

Calculons la distance entre Z et le pigeonnier P

$Z_1P = \sqrt{(14-5)^2+(10-8)^2} = \sqrt{9^2+2^2} = \sqrt{85}$

$Z_2P = \sqrt{(14-2)^2+(10-5)^2} = \sqrt{12^2+5^2} = \sqrt{169} = 13$

$\sqrt{85} < 10$ et $13 > 10$

$\boxed{\text{Donc le TRESOR est } Z_1\ (5,8)}$

II)

1) $M(x, y) \in (AB) \Leftrightarrow$ les points A, B et M sont alignés

$\Leftrightarrow$ les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AM}$ sont colinéaires.

$\vec{AB}\,(6-2\,;\,1-3) = (4\,;\,-2)$ et $\vec{AM}\,(x-2\,;\,y-3)$

$\vec{AB}$ et $\vec{AM}$ colinéaires $\Leftrightarrow 4\times(y-3) - (-2)\times(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow 4y - 12 + 2x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 4y - 16 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x + 2y - 8 = 0}$

2) $(d) : x + 2y + c = 0$

$C \in (d)$, donc $x_C + 2y_C + c = 0 \Leftrightarrow 5 + 2(-9) + c = 0$

$\Leftrightarrow 5 - 18 + c = 0 \Leftrightarrow c = 13$

Donc $\boxed{(d) : x + 2y + 13 = 0}$

$x_D + 2y_D + 13 = -2 + 2\times(-5) + 13 = -2 - 10 + 13 = 1 \neq 0$

Donc $D \notin (d)$.

3) $\vec{DE} = (0+2\,;\,5+5) = (2\,;\,10)$ $\quad \vec{DM} = (x+2\,;\,y+5)$

Donc $(DE) : 2(y+5) - 10(x+2) = 0 \Leftrightarrow 2y + 10 - 10x - 20 = 0$

$\Leftrightarrow -10x + 2y - 10 = 0$

$\Leftrightarrow -5x + y - 5 = 0$

Donc $\boxed{(DE) : -5x + y - 5 = 0}$

4) ~~(d) et (D~~ (AB) et (DE) ne sont pas parallèles. Elles ont donc un point d'intersection I.

$I \in (AB) \Leftrightarrow x_I + 2y_I - 8 = 0$

$I \in (DE) \Leftrightarrow -5x_I + y_I - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_I = 5x_I + 5 \\ x_I + 2(5x_I + 5) - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_I = 5x_I \\ 11x_I + 2 = \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = -2/11 \\ y_I = 5\times(-2/11) + 5 = -\frac{10}{11} + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = -2/11 \\ y_I = 45/11 \end{cases} \Rightarrow$ ~~Donc I (-1/6, 2~~

Donc $I\left(-2/11\,;\,45/11\right)$