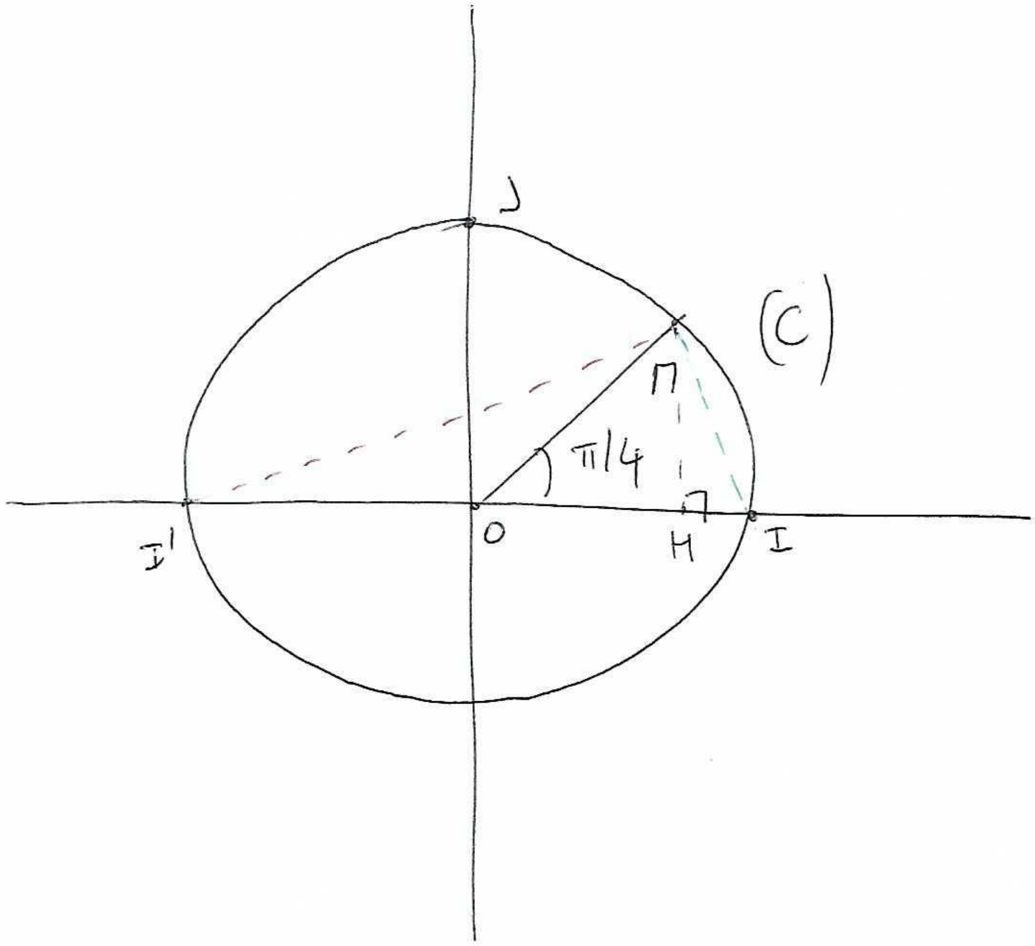

a) $I'H = I'O + OH = 1 + 1 \times \cos(\pi/4) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

b) D'après le théorème de Pythagore,

$$I'M^2 = I'H^2 + HM^2$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sin(\pi/4)\right)^2 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^2 + \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}_{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(1+2+2\sqrt{2}) + 1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[4 + 2\sqrt{2}\right]$$

$$= 2 + \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad I'M = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

c) Comme le triangle $I'MI$ possède un côté qui est le diamètre du cercle C, on en déduit que C est le cercle circonscrit et que $I'MI$ est un triangle rectangle d'hypoténuse $I'I$, donc rectangle en M

Donc $\widehat{I'MI} = \pi/2$

D'autre part, on sait que le triangle OMI est isocèle car

$OM = OI = 1$

D-c $\widehat{OMI} = \widehat{MIO}$

$\widehat{IOM} + \widehat{OMI} + \widehat{MIO} = \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + 2\,\widehat{MIO} = \pi$

$\Leftrightarrow 2\widehat{MIO} = 3\pi/4 \Leftrightarrow \widehat{MIO} = \frac{3\pi}{8}$

on sait aussi que $\widehat{II'M} + \widehat{I'MI} + \widehat{MII'} = \pi$

$\widehat{MII'} = \widehat{MIO} = \frac{3\pi}{8} \qquad \widehat{I'MI} = \pi/2$

D-c $\widehat{II'M} = \pi - \widehat{MIO} - \widehat{I'MI} = \pi - \frac{3\pi}{8} - \pi/2 = \frac{8-3-4}{8}\pi$

$= \pi/8$

$\cos(\widehat{II'M}) = \frac{I'M}{I'I} = \boxed{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \cos(\pi/8)} \simeq 0,92387$

on sait que $\sin^2(\pi/8) + \cos^2(\pi/8) = 1$

$\Leftrightarrow \sin^2(\pi/8) = 1 - \cos^2(\pi/8) = 1 - \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)$

$= \frac{4-2-\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

$\Rightarrow \boxed{\sin(\pi/8) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}} \simeq 0,38268$

d) $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \cos(\pi - \pi/8) = -\cos(\pi/8) = \frac{-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \sin(\pi - \pi/8) = \sin(\pi/8) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$