Montrons que

$$\sum_{1}^{n} \cancel{k} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

au rang 1

$$\sum_{1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times 2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$ Donc l'égalité est vérifiée.

Supposons que la propriété est vraie au rang n, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire que

$$\sum_{1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \sum_{n+1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}
\end{aligned}$$

CQFD.

Donc la propriété est démontrée.