$$f(x) = \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} \right)^x$$

$\boxed{\text{Ex I}}$

1000

(1)

$$= \exp\left[x \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} \right) \right]$$

$$= \exp\left[x \left[\ln(\ln(x+1)) - \ln(\ln(x)) \right] \right]$$

$$= \exp\left[\frac{\ln(\ln(x+1)) - \ln(\ln(x))}{1/x} \right]$$

$$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \exp\left[\frac{\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)} - \frac{1}{x\ln(x)}}{-1/x^2} \right]$$

$$= \lim_{+\infty} \exp\left[\frac{\frac{1}{(x+1)\ln(x)} - \frac{1}{x\ln(x)}}{-1/x^2} \right]$$

$$= \lim_{+\infty} \exp\left[\left(\frac{(x - x \pm 1)}{x(x+1)\ln(x)} \right) \times \left(-x^2 \right) \right]$$

$$= \lim_{+\infty} \exp\left[\frac{x^2}{x(x+1)\ln(x)} \right]$$

$$= \exp(0)$$

$$= \underline{\underline{1}}$$

Donner un équivalent

on pose $y = 1/x$ donc $x = 1/y$

Donc si $x \to +\infty$, $y \to 0$

$$f(x) = \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^x = \left(\frac{\ln(1/y+1)}{\ln(\frac{1}{y})}\right)^{1/y}$$

$$= \exp\left[\frac{1}{y} \ln\left[\frac{\ln\left(\frac{y+1}{y}\right)}{-\ln(y)}\right]\right]$$

$$= \exp\left[\frac{1}{y} \ln\left[\frac{\ln(y)-\ln(y+1)}{\ln(y)}\right]\right] = \exp\left[\frac{1}{y} \ln\left(1 - \frac{\ln(y+1)}{\ln(y)}\right)\right]$$

$$= g(y)$$

en $x \to +\infty$

$\simeq$ en $y \to 0$

$$g(y) \simeq \exp\left[\frac{1}{y} \times \left(-\frac{\ln(y+1)}{\ln(y)}\right)\right] \simeq \exp\left[\frac{1}{y} \times \frac{-y}{\ln(y)}\right]$$

$$g(y) \simeq \exp\left[-\frac{1}{\ln(y)}\right]$$

Donc $f(x) \simeq \exp\left[-\frac{1}{\ln(1/x)}\right] \simeq \exp\left[\frac{1}{\ln(x)}\right]$

Donc $\boxed{\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^x - 1 \simeq \exp\left[\frac{1}{\ln(x)}\right] - 1.}$

Exercice II

1)

si $x_1 < x_2$ et $f(x_1) > f(x_2)$, alors $\exists$ ~~x_3~~ $I_1 \subset [x_1, x_2]$

tel que $f'(x) \leq 0$ (Fonction décroissante)

si $x_2 < x_3$ et $f(x_2) < f(x_3)$, alors $\exists\, I_2 \subset [x_2, x_3]$

tel que $f'(x) \geq 0$ (Fonction croissante)

Donc il existe $c \in [x_1, x_3]$ tel que $f''(c) = \dfrac{f'(x_3) - f'(x_1)}{x_3 - x_1}$

$f'(x_3) \geq 0$ et $f'(x_1) \leq 0$, donc $f'(x_3) - f'(x_1) \geq 0$

et $x_3 - x_1 \geq 0$, donc $f''(c) \geq 0$. CQFD

2) g dérivable sur $]a;b[$ et $g(a) = g(b) = 0$ et $g''(x) \leq 0$ $\forall x \in]a,b[$.

$\forall x \in]a;b[$, $g''(x) \leq 0$, donc la fonction g est concave

Cela signifie que $\forall t \in [0,1]$ et $\forall (x_1, x_2) \in]a;b[$.

$$g\left(t x_1 + (1-t) x_2\right) \geq t f(x_1) + (1-t) f(x_2)$$

$\forall t \in [0,1]$ $g(ta + (1-t)b) \geq t f(a) + (1-t) f(b)$

$\forall t \in [0,1]$, $g(ta + (1-t)b) \geq 0$

~~si $t \in [0,1]$, $ta \in [0, a]$ et $(1-t)b \in [0$~~

si $x = ta + (1-t)b$ et si $t \in [0,1]$, $x \in [a,b]$

Donc $\forall x \in]a;b[$, $g(x) \geq 0$ CQFD