1) on note $P(X) = a_n X^n + Q(X)$ $\boxed{\text{Exercice 7}}$ 1

Donc $P'(X) = n a_n X^{n-1} + Q'(X)$

on a : $\phi(P) = (2X-1)P(X) - (X^2+1/2)P'(X)$

$= (2X-1)[a_n X^n + Q(X)] - (X^2+1/2)(n a_n X^{n-1} + Q'(X))$

$= 2a_n X^{n+1} - a_n X^n + (2X-1)Q(X) - n a_n X^{n+1} - \frac{1}{2} n a_n X^{n-1}$

$- (X^2+1/2)Q'(X)$

$= (2-n)a_n X^{n+1} - a_n X^n - \frac{n a_n}{2} X^{n-1} + (2X-1)Q - (X^2+\frac{1}{2}$

si $n=2$, $P(X) = aX^2+bX+c$, donc $\phi(P) = (b-a)X^2 + (2c-b-$

$-(c+1/2b)$

Donc $\phi(P)$ est de degré ≤ 2

si $n \neq 2$ $\deg(P) = n$ donc ~~du~~ $\text{Deg}(\phi(P)) = \underline{\underline{n+1}}$

2) $\phi(P) = 1$, donc ~~degré (P) = 0~~ degré $(\phi(P)) = 0$

Donc Degré $(P) = 2$

Donc
$$\begin{cases} b-a=0 \\ 2c-b-a=0 \\ -(c+1/2b)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ c=b \\ -3/2\, b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2/3 \\ a=-2/3 \\ c=-2/3 \end{cases}$$

Donc $\boxed{P(X) = -\frac{2}{3}X^2 - \frac{2}{3}X - \frac{2}{3}}$

$\underline{\underline{8 \text{ pts}}}$

1] a) La division euclidienne du Polynôme P par $x-a$ s'écrit

$$P = Q(X-a) + R \quad \text{avec } \deg R < 1$$

Donc le degré du Reste sera égal à 0.

$R = k$ si $k = 0$ a est une racine de P.

b) $P(X) = Q(X-a) + R(X)$

on sait que $\deg R < 1$ donc égal à 0.

Donc $R(X) = k$.

$P(a) = Q(a-a) + k \iff k = P(a)$

Donc $\underline{\underline{R = P(a)}}$

2] a) $P(X) = Q(X-a)(X-b)$ avec $\deg R < 2$

Donc le degré $R = \underline{\underline{0}}$ ou $\underline{\underline{1}}$.

Donc $R(X) = \alpha X + \beta$

b) $R(X) = \alpha X + \beta$

Donc
$$\begin{aligned} P(a) &= 0 + \alpha a + \beta \\ P(b) &= 0 + \alpha b + \beta \end{aligned} \iff \begin{cases} \beta = P(a) - \alpha a \\ P(b) = \alpha b + P(a) - \alpha a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = \dfrac{P(b) - P(a)}{b-a} \\ \beta = P(a) - \alpha a = \dfrac{bP(a) - aP(b)}{b-a} \end{cases}$$

Donc $\boxed{R(X) = \frac{P(b)-P(a)}{b-a} X + \frac{bP(a) - aP(b)}{b-a}}$

3\] a) $P(X) = Q(X-a)^2 + R(X)$ avec $\deg R < 2$

b) $R(X) = \alpha X + \beta$

$P(a) = 0 + \alpha a + \beta$

$P'(X) = Q'(X-a)^2 + 2(X-a)Q + R'(X)$

$= Q'(X-a)^2 + 2(X-a)Q + \alpha$

Donc $P'(a) = 0 + 0 + \alpha \Leftrightarrow \alpha = P'(a)$

Donc $\beta = P(a) - aP'(a)$

Donc $\boxed{R(X) = P'(a)X + (P(a) - aP'(a))}$.

4\] $X^n - X^{n-1} + X^2 - X + 1 = P(X)$

Par : $(X+1)$

$a = -1$

Donc $R(X) = P(-1) = (-1)^n - (-1)^{n-1} + 1 + 1 + 1$

$= 3$

$\boxed{R(X) = 3}$

Par : $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ $a = 1$ $b = -1$

$P(1) = 1$

$P(-1) = 3$

Donc $R(X) = \frac{3-1}{-2} X + \frac{-1+1-1+3}{-2}$

$\boxed{R(X) = -\frac{3}{2} X + 2}$

$P(x) = x^n - x^{n-1} + x^2 - x + 1$

Par $x+1$

$a = -1$ $\qquad$ Donc $R(x) = P(-1) = (-1)^n - (-1)^{n-1} + 3$

$= 2(-1)^n + 3$

$$\boxed{\text{Donc } R(x) = \underline{2(-1)^n + 3}}$$

Par $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

$a = 1 \quad b = -1$

$P(1) = 1$

$P(-1) = 2(-1)^n + 3$

$$R(x) = \frac{P(-1) - P(1)}{-1-1} X + \frac{(-1)P(1) - P(-1)}{-1-1}$$

$$= \frac{2(-1)^n + 2}{-2} X + \quad -1 \ \frac{-3 - 2(-1)^n}{-2}$$

$$\boxed{R(x) = -\left(1 + (-1)^n\right) X + 2 + (-1)^n}$$

Par $(x^2 + 2x + 1) : (x+1)^2$

$a = -1$

$R(x) = P'(-1)\, x + \left(P(-1) + P'(-1)\right)$

$P(-1) = 2(-1)^n + 3$

$P'(x) = n x^{n-1} - (n-1) x^{n-2} + 2x - 1 = n x^{n-1} - n x^{n-2} + x^{n-2} + 2x - 1$

$P'(-1) = 2n(-1)^{n-1} + (-1)^{n-2} - 3 = (2n-1)(-1)^{n-1} - 3$

Donc $\boxed{R(x) = \left[(2n-1)(-1)^{n-1} - 3\right] X + \left[2(-1)^n \cancel{+3} + (2n-1)(-1)^{n-1}\right]}$