Exercice 3

$f(x) = e^{x} \qquad g(x) = e^{-x}$

1) $T(a) : y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) = e^{x}$

Donc $f'(a) = e^{a}$ et $f(a) = e^{a}$

Donc $T(a) : y = e^{a}(x-a) + e^{a}$

$T(a) : y = e^{a}x - e^{a}a + e^{a} = e^{a}x + e^{a}(1-a)$

$U(a) : y = g'(a)(x-a) + g(a)$

$\forall x \in \mathbb{R}, \ g'(x) = -e^{-x}$

Donc $U(a) : y = -e^{-a}(x-a) + e^{-a}$

$U(a) : y = -e^{-a}x + ae^{-a} + e^{-a}$

$U(a) : y = -e^{-a}x + e^{-a}(1+a)$

2) $m_T = e^{a} \qquad m_U = -e^{-a}$

$m_T \times m_U = e^{a} \times (-e^{-a}) = -e^{a-a} = -e^{0} = -1$

Donc T et U sont orthogonales

3) a) $0 = e^{a}p + e^{a}(1-a)$

et $0 = -e^{-a}q + e^{-a}(1+a)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} p + 1 - a = 0 \\ -q + 1 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} p = a-1 \\ q = a+1 \end{cases}}$

b) $q - p = a+1 - (a-1) = a+1 - a+1 = 2$ CQFD ②