Devoir Maison N°8

Exercice n°1.

sur $\mathbb{R}-\{1\}$, $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$

1) $\lim\limits_{+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{-\infty} f(x)=-\infty$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ et $\lim\limits_{-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$

La fonct° f admet donc une asymptote oblique qui est une droite de coefficient directeur égal à 1.

$\lim\limits_{1^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{1^-} f(x)=-\infty$ $\Rightarrow$ Existence Asymptote d'équat° $x=1$.

2) $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2(x-2)}{(x-1)^2}$

on pose $Z=x-1$ (donc $x=Z+1$)

$f(x)=\dfrac{(Z+1)^2(Z-1)}{Z^2}=\dfrac{(Z^2+2Z+1)(Z-1)}{Z^2}=\dfrac{Z^3-Z^2+2Z^2-2Z+Z-1}{Z^2}$

$f(x)=\dfrac{Z^3+Z^2-Z-1}{Z^2}=\dfrac{Z^3}{Z^2}+1-\dfrac{1}{Z}-\dfrac{1}{Z^2}$

$=Z+1-\dfrac{1}{Z}-\dfrac{1}{Z^2}=x-1+1-\dfrac{1}{(x-1)}-\dfrac{1}{(x-1)^2}$

Donc $f(x)=x-\dfrac{1}{(x-1)}-\dfrac{1}{(x-1)^2}$

On peut donc écrire $f(x)$ sous la forme $f(x)=ax+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{(x-1)^2}$

avec $a=1$, $b=-1$ et $c=-1$.

$\lim\limits_{-\infty} f(x)=\lim\limits_{+\infty} x$, donc Δ $y=x$ est asymptote à (C).

Position relative de (C) et Δ.

②

Etudions le signe de $g(x) = -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}$

$$g(x) = \frac{-(x-1)-1}{(x-1)^2} = \frac{-x}{(x-1)^2}$$

Donc si $x \leq 0$, $g(x) \geq 0$

si $0 \leq x < 1$, $g(x) \leq 0$

si $x > 1$, $g(x) < 0$

Donc sur l'intervalle $]-\infty, 0]$, $g(x) = f(x) - x \geq 0$

et sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$, $g(x) = f(x) - x \leq 0$

Donc sur $]-\infty, 0]$, $f(x) \geq x$, la courbe C est donc au dessus de Δ

sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$, $f(x) \leq x$, la courbe C est donc au dessous de Δ.

3) calculons la dérivée de f.

$f(x) = x - \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2}$ donc $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}$

$$f'(x) = \frac{(x-1)^3 + (x-1) + 2}{(x-1)^3} = \frac{(x^2-2x+1)(x-1) + (x-1) + 2}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + x - \cancel{1} + x - \cancel{1} + \cancel{2}}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x}{(x-1)^3} = \frac{x(x^2 - 3x + 4)}{(x-1)^3}.$$

Etudions chaque nombre

x est ≥ 0 qd $x \geq 0$ et $x \leq 0$ qd $x \leq 0$

$x^2 - 3x + 4$ est toujours positif ($\Delta = b^2 - 4ac < 0$)

$(x-1)^3 > 0$ qd $x > 1$ et $(x-1)^3 < 0$ qd $x < 1$.

On obtient donc le tableau suivant

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-3x+4		$+$		$+$		$+$	
$(x-1)^3$		$-$		$-$	$\|$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

le Tableau de Variation de f est donc

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$ $-\infty$	$\|$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

4) Axe des x, $y=0$

$$x \in (C) \text{ et } x \in (\text{Axe } x) \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x^3-2x^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x^2(x-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \text{ ou } x=2 \end{cases}$$

les points d'intersection de (C) avec l'axe des x, sont $A(0,0)$ et $B(2,0)$

Axe des y, $x=0$

$$x \in (C) \text{ et } x \in (\text{Axe } y) \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=0 \end{cases}$$

le point d'intersection de (C) avec l'axe des y est donc $D(0,0)$.

Coefficients tgtes $:\Rightarrow$ $f'(0)=0$ $\quad f'(2)=\dfrac{2(4-6+4)}{(2-1)^3}=4$

5) Mq il existe un point C pour lequel la tgte T à (C) est // Δ. ④

Pour que 2 droites soient parallèles, elles doivent avoir le même coefficient directeur.

le coeff Directeur de Δ est : 1.

$f'(x_C) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x_C(x_C^2 - 3x_C + 4)}{(x_C - 1)^3} = 1.$

$\Leftrightarrow x_C(x_C^2 - 3x_C + 4) = (x_C - 1)^3 \Leftrightarrow x_C^3 - 3x_C^2 + 4x_C = x_C^3 - 3x_C^2 + 3x_C - 1$

$\Leftrightarrow \cancel{\quad} + x_C + 1 = 0 \Leftrightarrow x_C = -1$

Donc le point C existe bien et ses coordonnées sont $C(-1, f(-1))$

$f(-1) = \dfrac{-3}{4}$ $\Leftrightarrow$ $C\left(-1, -3/4\right)$

(T) a pour équation $t(x) = x + b$. La tgte passe par le point C, donc $t(-1) = -3/4$, donc $-3/4 = -1 + b \Leftrightarrow b = 1/4$

Donc $\underline{t(x) = x + 1/4}$

6)

7) Solut° équat° $f(x) = x + m$

si $m > 1/4$, pas de solut°

si $m = 1/4$, 1 solut°

si $m < 1/4$, 2 solutions