Exercice N°1

1) $$\Pi = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2°) a) P_1 à P_2 → $(P_1$ à $P_4) + (P_4$ à $P_2)$ — P_2 à P_1 /

P_1 à P_3 / — P_2 à P_3 /

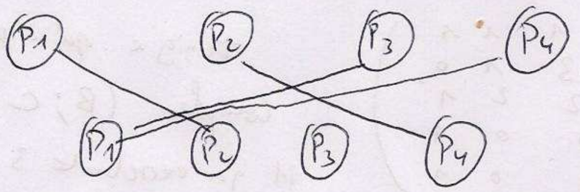
P_1 à P_4 / — P_2 à P_4 → $(P_2$ à $P_1) + (P_1$ à $P_4)$

P_3 à P_1 → $(P_3$ à $P_2) + (P_2$ à $P_1)$ — P_4 à P_1 → $(P_4$ à $P_2) + (P_2$ à P_1

P_3 à P_2 / — P_4 à P_2 /

P_3 à P_4 / — P_4 à P_3 /

on a donc l'arbre suivant



Il y a donc 4 chemins

b)

P_i \ P_j	P_1	P_2	P_3	P_4
P_1		1	0	0
P_2	0		0	1
P_3	1	0		0
P_4	1	0	0	

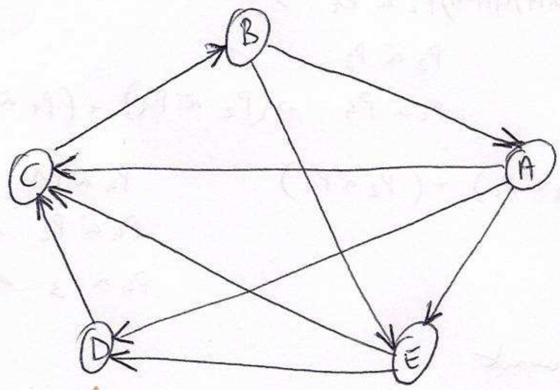
Il y a donc 4 chemins.

2 + 3

Exercice N°2

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1°)



2°)

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il n'y a qu'un seul couple (B ; C) où il y a exactement 3 chemins pour les relier.

Ces Trois chemins sont : $B \xrightarrow{1} A \xrightarrow{2} E \xrightarrow{3} C$

$B \xrightarrow{1} E \xrightarrow{2} D \xrightarrow{3} C$

$B \xrightarrow{1} A \xrightarrow{2} D \xrightarrow{3} C$

Exercice N°3.

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{R}.$$

1°) $$M^2 = M \times M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 18 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M^2 \times M = \begin{pmatrix} 9 & 18 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 81 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = M^3 \times M = \begin{pmatrix} 27 & 81 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 & 324 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}$$

$$M^5 = M^4 \times M = \begin{pmatrix} 81 & 324 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 243 & 1215 & 0 \\ 0 & 243 & 0 \\ 0 & 0 & 243 \end{pmatrix}$$

Montrons par récurrence que $M^n = \begin{pmatrix} 3^n & n \times 3^n & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

$$M^1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \times 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{cqfd}$$

Supposons que $M^n = \begin{pmatrix} 3^n & n \times 3^n & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$, Montrons que $M^{n+1} = \begin{pmatrix} 3^{n+1} & (n+1)3^{n+1} & 0 \\ 0 & 3^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$

$$M^{n+1} = M^n \times M = \begin{pmatrix} 3^n & n \times 3^n & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n+1} & (3^{n+1} + 3n \times 3^n) & 0 \\ 0 & 3^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3^{n+1} & 3(n+1) \times 3^n & 0 \\ 0 & 3^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n+1} & (n+1)3^{n+1} & 0 \\ 0 & 3^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{cqfd}$$

2) Montrons par récurrence que

$$\boxed{P^n = \begin{pmatrix} a^n & na^n & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}}$$

$$P^1 = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{cqfd.}$$

$$P^{n+1} = P_n \times P = \begin{pmatrix} a^n & na^n & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^{n+1} & (a \times a^n + na^{n+1}) & 0 \\ 0 & a^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^{n+1} & a^{n+1} \times (n+1) & 0 \\ 0 & a^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1)\, a^{n+1} & 0 \\ 0 & a^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & a^{n+1} \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{\text{cqfd}}}$$

$$\text{Donc} \quad P^n = \begin{pmatrix} a^n & na^n & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}.$$