Exercice 79

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$$ $\mathcal{C}$ courbe d'équation $y = f(x)$.

$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

1°)

$$f(x) = \frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^3-2x^2+x-x}{(x-1)^2}$$

$$f(x) = \frac{x^3-2x^2+x}{(x-1)^2} - \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{x(x^2-2x+1)}{(x-1)^2} - \frac{x}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x(x-1)^2}{(x-1)^2} - \frac{x}{(x-1)^2}$$

$$f(x) = x - \frac{x}{(x-1)^2} = x - \left(\frac{x-1+1}{(x-1)^2}\right) = x - \left(\frac{x-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2}\right)$$

$$f(x) = x - \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right)$$

$$f(x) = x - \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2}$$

$f(x)$ est donc bien de la forme $ax + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$

avec $a = 1$, $b = -1$ et $c = -1$.

$\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, donc $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique Δ d'équation $y = x$.

2°) Etude de la fonction f.

a) limites.

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{1^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{1^-} f(x) = -\infty$

$\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale (D) $x = 1$.

b) Calcul de la dérivée

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = x - \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^3 + (x-1) + 2}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x}{(x-1)^3} = \frac{x(x^2 - 3x + 4)}{(x-1)^3}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 - 3x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 - 3x + 4 = 0$ (1)

(1) $\Rightarrow$ Calculons le discriminant. $\Delta = 3^2 - 4 \times 4 = -7 < 0$

L'équation (1) n'a donc pas de solution et $x^2 - 3x + 4 > 0$

c) Signe de la dérivée

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

d) Tableau de variation

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

e) Points d'intersection avec les axes du repère.

$A \in \varphi$ et $A \in$ (Axe des x) $\Leftrightarrow \begin{cases} y_A = \dfrac{x_A^3 - 2x_A^2}{(x_A-1)^2} \\ \text{et} \\ y_A = 0 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} y_A = 0 \\ x_A^3 - 2x_A^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_A = 0 \\ x_A^2(x_A - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_A = 0 \\ x_A = 0 \text{ ou } x_A = 2 \end{cases}$

Donc Il y a deux points d'intersection $A_1\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ et $A_2\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

$tgt(A_1) = f'(0) = 0$

$tgt(A_2) = f'(2) = \dfrac{2(4-6+4)}{1^3} = 2 \times 2 = 4$

$B \in \varphi$ et $B \in$ (Axe des y) $\Leftrightarrow \begin{cases} y_B = \dfrac{x_B^3 - 2x_B^2}{(x_B-1)^2} \\ x_B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_B = 0 \\ x_B = 0 \end{cases}$

Donc $B\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$tgt(B) = f'(0) = 0$

f) Tableau de valeurs

$f(-4) = \cancel{0,460}\ -3,84$

$f(-3) = \cancel{0,470}\ -2,81$

$f(-2) = \cancel{0,53}\ -1,78$

$f(-1) = \cancel{0,75}\ -0,75$

$f(0) = 0$

$f(2) = 0$

$f(3) = \cancel{1,125}\ 2,25$

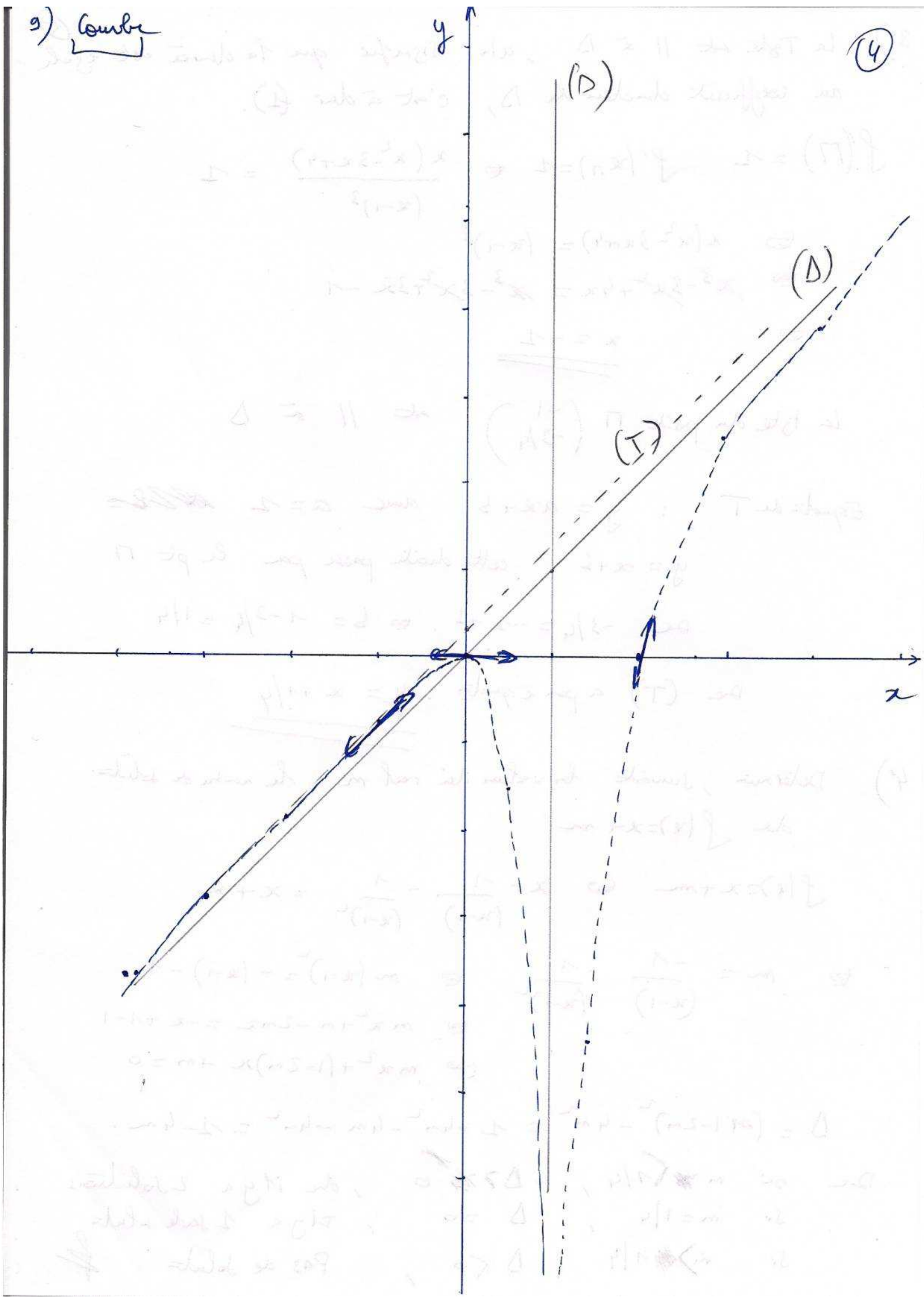
$f(4) = \cancel{1,28}\ 3,55$

$f(5) = \cancel{1,42}\ 4,65$

$f(6) = 5,76$

$f(1,5) = -4,5$

9) Courbe



3°) La Tgte est // à D , cela signifie que la dérivée est égale au coefficient directeur de D, c'est à dire (1).

$f'(M) = 1 \qquad f'(x_M) = 1 \iff \dfrac{x(x^2-3x+4)}{(x-1)^3} = 1$

$\iff x(x^2-3x+4) = (x-1)^3$

$\iff \cancel{x^3} \cancel{-3x^2} + 4x = \cancel{x^3} \cancel{-3x^2} + 3x - 1$

$\iff \underline{\underline{x = -1}}$

La tgte du point $M\begin{pmatrix}-1\\-3/4\end{pmatrix}$ est // à D

Equation de T : $y = ax + b$ avec $a = 1$

$y = x + b$ cette droite passe par le pt M

Donc $-3/4 = -1 + b \iff b = 1 - 3/4 = 1/4$

Donc (T) a pour équation : $\underline{\underline{y = x + 1/4}}$

4°) Déterminer, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de $f(x) = x + m$

$f(x) = x + m \iff x - \dfrac{1}{(x-1)} - \dfrac{1}{(x-1)^2} = x + m$

$\iff m = \dfrac{-1}{(x-1)} - \dfrac{1}{(x-1)^2} \iff m(x-1)^2 = -(x-1) - 1$

$\iff mx^2 + m - 2mx = -x + 1 - 1$

$\iff mx^2 + (1-2m)x + m = 0$

$\Delta = (1-2m)^2 - 4m^2 = 1 + 4m^2 - 4m - 4m^2 = 1 - 4m.$

Donc si $m < 1/4$, $\Delta > 0$, donc il y a 2 solutions
si $m = 1/4$, $\Delta = 0$, Il y a 1 seule solution
si $m > 1/4$, $\Delta < 0$, Pas de solution