Exercice 1, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ 1

1. a) $u_2 = 2u_1 - u_0 = 4 - 0 = 4$
$u_3 = 2u_2 - u_1 = 2\times 4 - 2 = 6$
$u_4 = 2u_3 - u_2 = 2\times 6 - 4 = 8$
$u_5 = 2u_4 - u_3 = 2\times 8 - 6 = 10$
$u_6 = 2u_5 - u_4 = 2\times 10 - 8 = 12$

b) $u_2 = 2u_1 - u_0 = \cancel{2\times 2 - (-1) = 6 + 1 = 7}\ 2\times(-1) - 3 = -5$
$u_3 = 2u_2 - u_1 = \cancel{2\times 7}\ 2\times(-5) + 1 = -9$
$u_4 = 2u_3 - u_2 = -18 + 5 = -13$
$u_5 = 2u_4 - u_3 = -26 + 9 = -15$
$u_6 = 2u_5 - u_4 = -30 + 13 = -17$

c) Dans le cas a), on peut dire que la suite u_n est une suite arithmétique de raison 2 $u_n = u_0 + 2n = 2n$ (car $u_0 = 0$)
Dans le cas b), on peut dire que la suite u_n est également une suite arithmétique de raison -4 et de premier terme u_0
$u_n = u_0 - 4n = 3 - 4n$

Exercice 2

1) S'il y a n tuyaux sur une rangée, il y en aura $n-1$ sur celle du dessus. La somme est donc $S = \sum_{1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

1) S'il y a 30 tuyaux posés au sol, il y aura
$S = \sum_{1}^{n=30} k = \frac{30\times 31}{2} = 15\times 31 = 465$

2) $S = \sum_{1}^{n=135} k = \frac{135\times 136}{2} = 9180$

Exercice 3 ②

1.) a) Au bout de la première semaine, on met les 120 L de gazon compté

donc $v_1 = 120 + \frac{1}{4} \times 0 = 120$

$v_2 = 120 + \frac{1}{4}(120) = 120 + 30 = 150$

$v_3 = 120 + \frac{1}{4}(150) = 120 + 37{,}5 = 157{,}5$

b) ~~Montrons par récurrence que~~ $V_{n+1} = 120 + \frac{1}{4}(V_n)$

~~On a bien : $V_1 = 240 + \frac{1}{4} + V_0$~~

~~Supposons que $V_n = 120 + \frac{V_{n-1}}{4}$~~

c) - La suite V_n n'est pas arithmétique car $V_{n+1} - V_n$ n'est pas constant.

- La suite V_n n'est pas non plus géométique car ~~elle ne peut pas s'écrire sous la forme $V_n = V_0 +$~~ le rapport $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ n'est pas constant non plus.

La suite n'est donc NI arithmétique NI géométique.

2) $\forall n \geq 1, \quad a_n = V_n - V_{n-1}$

a) ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

$V_{n+1} = 120 + \frac{1}{4} V_n$, donc $V_n = 4V_{n+1} - 480$

donc $a_n = V_n - V_{n-1} = V_n - (4V_n - 480) = 480 - 3V_n$

donc $a_{n+1} = 480 - 3V_{n+1} = 480 - 3(120 + 1/4\, V_n) = 480 - 360 - \frac{3}{4} V_n$

$= 120 - \frac{3}{4} V_n$

donc $a_{n+1} = \frac{1}{4} \times (480 - 3V_n) = \frac{1}{4} a_n$

donc a_n est une suite géométique de raison $1/4 = 0{,}25$

(3)

b) $a_1 = 30 \quad a_2 = 7,5$

$$a_n = 30 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 120 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = 120 \times (0,25)^n$$

3.) a) Montrer que $\forall n \geq 1$: $V_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

$$a_1 + \cdots + a_n = \sum_1^n a_k = \sum_1^n V_k - V_{k-1} = (V_1 - V_0) + (V_2 - V_1) + (V_3 - V_2) + \cdots + (V_n - V_{n-1})$$
$$= V_n$$

Donc $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = V_n$ cqfd.

b) $V_n = \sum_1^n a_k$

a_k est une suite géométrique.

La somme des termes d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est : $\sum_0^n u_p = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q}$

Donc $V_n = \sum_1^n 120 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{120 - 120 \times (1/4)^{n}}{1 - 1/4}$

$$= \frac{120\left(1 - (1/4)^{n}\right)}{3/4}$$

$$= 160\left(1 - (1/4)^{n}\right)$$

$$\underline{\underline{V_n = 160\left(1 - (0,25)^n\right)}}$$

4) $\lim_{n \to +\infty} V_n = 160$, donc le bac de stockage pouvant contenir 300 l, il ne sera jamais rempli