Exercice N°1.

1) $f_n(x) = (1+x)^n$

a) Equation réduite de la Tgte T_n au point d'abscisse 0.

$$y = f'(0) + (x-0) + f(0)$$

$f_n'(x) = n(1+x)^{n-1}$, donc $f'(0) = n \times 1 = n$ ①

$f(0) = 1$

Donc $\underline{\underline{y = nx + 1}}$

b) g_n la fonction représentée par T_n. Etudier le signe de $f_n - g_n$ sur $[0, +\infty[$

$h_n(x) = f_n(x) - g_n(x) = (1+x)^n - nx - 1$

$= (1+x)^n - nx - 1$ ②

$h'_n(x) = n(x+1)^{n-1} - n = n\left[(x+1)^{n-1} - 1\right]$

sur $[0, +\infty[$, $h'_n(x) \geq 0$, donc la fonction $h_n(x)$ est croissante sur $[0, +\infty[$.

$h_n(0) = 0$, donc $\forall x \in [0, +\infty[$, $h_n(x) \geq 0$ (car $h_n(x)$ est croissante).

Donc sur $[0, +\infty[$, $\underline{\underline{f_n(x) - g_n(x) \geq 0}}$

2) on vient de montrer que $f_n(x) - g_n(x) \geq 0$

Donc $(1+x)^n - nx - 1 \geq 0$ ①

Donc $(1+x)^n \geq nx + 1$

Donc $\underline{\underline{(1+x)^n \geq 1 + nx}}$ cqfd

Exercice 2

1) $a = \dfrac{V(5s) - V(0)}{t(5s) - t(0)}$

$V(5s) = 135 \text{ km/h} = \dfrac{135\,000}{3600} \text{ m/s} = \dfrac{1350}{36} \text{ m/s} = 37{,}5 \text{ m/s}$

$V(0) = 90 \text{ km/h} = \dfrac{90\,000}{3600} \text{ m/s} = 25 \text{ m/s}$

$t(5s) = 5$

$t(0s) = 0$

Donc $a = \dfrac{37{,}5 - 25}{5 - 0} = \dfrac{12{,}5}{5} = 2{,}5$ (1,5)

2) $\dfrac{df}{dt} = a = 2{,}5$ Donc $f = 2{,}5\,t + \text{cte}$

on peut prendre $f(t) = 2{,}5\,t + \alpha$ (où α est une constante) (1)

3) D'après l'énoncé $a = \dfrac{dv}{dt}$, donc on peut dire que

$V(t)$ est de la même forme que $f(t)$, c'est-à-dire que

$V(t) = 2{,}5\,t + \alpha$

Or on sait qu'à $t = 0$, $V = 90$ km/h $= 25$ m/s. (1)

Donc $25 = 2{,}5 \times 0 + \alpha$

Donc $\alpha = 25$

Par conséquent, $V(t) = 2{,}5\,t + 25$

4) On sait que $V(t) = 2{,}5\,t + 25$ et que $\dfrac{dx}{dt} = V$

Il faut donc trouver une primitive de $2{,}5\,t + 25$

$x(t)$ sera donc de la forme : $x(t) = \dfrac{2{,}5}{2} t^2 + 25\,t + \beta$ (β constante)

$x(t) = \frac{2,5}{2} t^2 + 25t + \beta$

à $t=0$, la distance parcourue est 0

Or $0 = 0 + 0 + \beta$

Donc $\beta = 0$

Donc $x(t) = \frac{2,5}{2} t^2 + 25t$

La distance d parcourue est : $x(5) - x(0)$

$$d = x(5) - x(0)$$
$$= \frac{2,5}{2} \times 5^2 + 25 \times 5 - 0$$
$$= 31,25 + 125$$
$$d = 156,25 \text{ m}$$